На правах рукописи

Федотов Александр Иванович

Конечномерные аппроксимации решений сингулярных интегродифференциальных и периодических псевдодифференциальных уравнений

01.01.07 – вычислительная математика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Казань – 2011

Работа выполнена в Казанском филиале Московского социально-гуманитарного института.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН
Васин Владимир Васильевич
доктор физико-математических наук,
профессор Плещинсикй Николай Борисович
доктор физико-математических наук,
профессор Рамазанов Марат Давидович

Ведущая организация – Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита состоится 29 марта 2012 г., в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, корпус 2, ауд. 218.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета.

Автореферат разослан 2 февраля 2012 года.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук,
профессор **О. А. Задворнов**

В диссертационной работе рассматривается актуальная научная проблема обоснования простых, легко реализуемых приближенных методов решения важных с практической точки зрения классов сингулярных интегродифференциальных и периодических псевдодифференциальных уравнений.

Общая характеристика работы

Диссертация посвящена разработке и обоснованию приближенных методов решения различных классов сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши, в которых производные аппроксимируются конечными разностями, а интегралы, в том числе сингулярные, квадратурными суммами. В работе предложены и обоснованы полиномиальный метод коллокаций для полных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром Гильберта, при этом приближенное решение ищется в виде интерполяционного полинома с кратными узлами, и полиномиальный метод коллокации для приближенного решения периодических псевдодифференциальных уравнений, являющихся естественным обобщением сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром Гильберта.

Актуальность проблемы. Сингулярные интегродифференциальные уравнения составляют широкий класс задач, которые, с одной стороны, являются обобщением сингулярных интегральных уравнений, а с другой – обыкновенных дифференциальных уравнений или, в многомерном случае, уравнений в частных производных. Как и сингулярные интегральные уравнения, сингулярные интегродифференциальные уравнения тесно связаны с краевыми задачами теории функций комплексной переменной. Как обобщение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, сингулярные интегродифференциальные уравнения относятся к задачам математической физики. Таким образом, как теория, так и методы исследования сингулярных интегродифференциальных уравнений лежат на стыке теорий краевых задач для аналитических функций и задач математической физики.

Обе эти тесно взаимосвязанные теории к настоящему времени хорошо развиты в качественном плане, то есть вопросы существования и единственности решений и их принадлежность к определенным функциональным пространствам исследованы глубоко и полно. Однако многие вопросы нахождения самих этих решений как для конкретных уравнений, так и для классов уравнений, определяемых классами коэффициентов и правых частей, остаются открытыми до сих пор. Известно, что сингулярные интегродифференциальные уравнения точно решаются лишь в редких частных случаях. Поэтому актуальной задачей является разработка и теоретическое обоснование приближенных методов решения таких уравнений.

Общей теории приближенных методов решения операторных уравнений и ее приложениям к сингулярным интегральным и интегродифференциальным уравнениям посвящено большое число работ. Первые значительные результаты в этой области были получены С. Г. Михлиным, В. В. Ивановым, Б. Г. Габдулхаевым; весомый вклад в развитие приближенных методов решения сингулярных уравнений внесли также А. А. Бабаев, С. М. Белоцерковский, И. Гохберг, М. Гольберг, В. А. Золотаревский, А. И. Каландия, И. К. Лифанов, Б. И. Мусаев, З. Прёссдорф, Н. Я. Тихоненко, М. А. Шешко, Д. Эллиотт, а также их ученики и последователи.

На основании этих работ можно констатировать, что к настоящему времени предложено и обосновано большое число различных приближенных методов решения сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши, и в ряде случаев получены окончательные результаты, то есть для отдельных классов уравнений указаны методы, обладающие наивысшей (асимптотически или по порядку) скоростью сходимости приближенных решений к точному. Однако на практике предпочтение нередко отдается методам, обладающим простыми вычислительными схемами, даже если скорость их сходимости невелика. К таким методам относятся, например, разностный и квадратурно-разностный методы решения регулярных дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Это привело к необходимости разработки и обоснования аналогичных приближенных методов для решения различных классов сингулярных интегродифференциальных уравнений.

Цель диссертационной работы состоит в разработке и обосновании квадратурно-разностных и коллокационных методов решения различных классов сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши, а также в обосновании полиномиальных коллокационных методов решения периодических псевдодифференциальных уравнений и систем таких уравнений.

Направление исследований. Проведенные исследования опираются на результаты общей теории приближенных методов решения операторных уравнений, основы которой заложены в работах Л. В. Канторовича, на результаты Б. Г. Габдулхаева по обоснованию приближенных методов решения сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений, на результаты Г. М. Вайникко по обоснованию непроекционных методов решения операторных уравнений и на методику Д. Арнольда и В. Вендланда обоснования метода коллокаций путем сведения его к нестандартному методу Галеркина. При выводе и обосновании полученных в диссертации результатов существенным образом используются теории функций действительного и комплексного переменного, сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений, краевых задач, а также некоторые оценки теории приближенных методов решения операторных уравнений.

Обоснованность и достоверность полученных результатов основаны на строгих доказательствах, содержащих подробные выкладки и вычисления автора диссертации, а также, где это необходимо, ссылки на результаты других авторов. В приложении к диссертационной работе приведены численные примеры, подтверждающие результаты и выводы, полученные в ней.

На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационной работы.

1. Для линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром Гильберта обоснованы квадратурно-разностные методы, основанные на аппроксимации точного решения сплайнами и тригонометрическими полиномами с кратными узлами.

2. Для линейных и нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром Гильберта обоснованы сеточные квадратурно-разностные методы решения.

3. Сеточный кубатурно-разностный метод решения обоснован для многомерных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром Гильберта.

4. Обоснован метод полиномиальной коллокации для приближенного решения периодических псевдодифференциальных уравнений и систем псевдодифференциальных уравнений в пространствах Соболева.

5. Для линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром Коши обоснован сеточный квадратурно-разностный метод решения.

6. Получены оценки норм операторов Лагранжа в одномерном и многомерных пространствах Соболева.

Теоретическое значение и научная новизна работы. Исторически сложилось так, что методики обоснования приближенных методов решения интегральных уравнений и дифференциальных уравнений развивались отдельно. Основоположником общей теории используемой для обоснования приближенных методов решения интегральных уравнений является Л. В. Канторович. Позже его теория была использована для обоснования некоторых прямых и проекционных методов методов решения сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений в работах Б. Г. Габдулхаева и его учеников. Разностные методы решения дифференциальных уравнений обосновывались путем доказательства аппроксимации точного уравнения разностной схемой и ее устойчивости. Позже, в работах Г. М. Вайникко, эта методика была обобщена до теории приближенных методов решения операторных уравнений на основе понятий регулярной, устойчивой и компактной сходимости операторов. Однако ни одна из этих теорий в отдельности не позволяла обосновывать квадратурно-разностные методы решения сингулярных интегродифференциальных уравнений.

В данной работе предложены и обоснованы различные квадратурно-разностные методы решения сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядрами Гильберта и Коши. Причем для большинства предложенных методов обоснование проводилось с помощью новой методики, разработанной автором.

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми. Обоснования различных квадратурно-разностных методов, приведенные в работе, показывают эффективность новой методики обоснования, разработанной автором. Эта методика в дальнейшем может быть использована для обоснования подобных методов решения широкого класса сингулярных интегродифференциальных и псевдодифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при дальнейшем развитии теории приближенных методов решения сингулярных интегродифференциальных и периодических псевдодифференциальных уравнений. Они могут быть, кроме того, непосредственно применены при решении прикладных задач, сводящихся к уравнениям указанных типов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации по мере их получения были доложены на Республиканской научно-технической конференции "Интегральные уравнения в прикладном моделировании" (г. Киев, 1983 г.), на V Всесоюзной школе "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики и теории приближений" (г. Казань, 1984 г.), на Всесоюзных симпозиумах "Метод дискретных особенностей в задачах математической физики" (г. Харьков, 1987, 1989, 1993 гг., г. Одесса, 1991 г.), на Всесоюзной конференции "Методы решения сингулярных интегральных уравнений" (г. Тарту, 1989 г.), на Международной конференции "Алгебра и анализ", посвященной 100-летию со дня рождения Н.Г.Чеботарева (г. Казань, 1994 г.), на Школе-конференции "Терия функций и ее приложения" (г. Казань, 1995 г.), на Втором европейском математическом конгрессе ECM2 (г. Будапешт, 1996 г.), на Конференции по дифференциальным уравнениям и их приложениям EQUADIFF 9 (г. Брно, 1997 г.), на Международной конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения" (г. Одесса, 2000 г.), на Международных конференциях "Dynamical systems modelling and stability investigation" (г. Киев, 2001, 2003 гг.), на Научной конференции, посвященной 125-летию Казанского педагогического университета (г. Казань, 2001 г.), на Международной конференции по вычислительной математике и приложениям ENUMATH 2003 (г. Прага, 2003 г.), на Международной конференции "Алгебра и анализ", посвященной 200-летию Казанского государственного университета (г. Казань, 2004 г.), на Десятой международной научной конференции им. академика М. Кравчука (г. Киев, 2006 г.), на международных научных конференциях "Differential & difference equations and applications" (г. Мельбурн, Флорида, 2005 г., г. Орландо, Флорида, 2008 г., г. Понта Дельгада, 2011 г.), на Девятой международной Казанской летней научной школе-конференции "Теория функций, её приложения и смежные вопросы" (г. Казань, 2009 г.), а также на Итоговых научных конференциях Казанского государственного университета 1985-2003 гг. (г. Казань) и на научных семинарах "Теория аппроксимации и её приложения" при Казанском государственном университете (руководитель: профессор Б. Г. Габдулхаев) и "Геометрическая теория функций и краевые задачи" при НИИ механики и математики им. Н. Г. Чеботарева (руководитель: профессор Ф. Г. Авхадиев).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[39]. Все результаты диссертации получены автором лично, соавторов нет.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, каждая из которых разбита на параграфы, заключения, списка цитированной литературы из 208 наименований и приложения. Общий объем работы 255 страниц. Параграфы внутри каждой главы имеют независимую нумерацию. Определения, теоремы, леммы, следствия и замечания нумеруются независимо друг от друга с указанием номера главы и порядкового номера внутри главы. Номера формул состоят из номера главы, номера параграфа и непосредственно номера формулы внутри параграфа.

Краткое содержание работы

Во введении отмечены характер, направленность и методология диссертационного исследования. Их главным содержанием являются, как указано выше, построение и обоснование квадратурно-разностных методов решения различных классов сингулярных интегродифференциальных уравнений, а также новые методики обоснования квадратурно-разностных методов и полиномиального метода коллокаций для приближенного решения периодических псевдодифференциальных уравнений.

Сингулярные интегральные уравнения, содержащие производную искомой функции (то есть сингулярные интегродифференциальные уравнения), были рассмотрены впервые в работах А. Пуанкаре в связи с теорией приливов и Д. Гильберта в 1902 – 1904 гг. В 1918 г. Л. Прандтль, исследуя аэродинамические свойства поверхностей, получил сингулярное интегродифференциальное уравнение, которое носит имя своего первооткрывателя и до сих пор привлекает к себе внимание как специалистов по аэро- и гидродинамике, так и математиков. С этого времени сингулярные интегродифференциальные уравнения появляются в работах по аэро- и гидродинамике, теории упругости, электродинамике, теории дифракции.

С 1938 года начались планомерные исследования сингулярных интегродифференциальных уравнений в рамках развития математической теории краевых задач теории функций комплексной переменной. Ф. Д. Гахов в 1938 году, И. Н. Векуа в 1942 году и Д. И. Шерман в 1946 году представили три различные постановки задачи Гильберта, содержащей производные искомой функции, – в виде сингулярного интегродифференциального уравнения, в виде краевой задачи и в виде задачи для гармонических функций. В монографии "Краевые задачи" Ф. Д. Гахов показал, что все три постановки в целом "равносильны как в отношении методов, которые могут быть применены для решения любой из них, так и в отношении результатов, которые при этом получаются".

Аналогичное обобщение задачи Римана было впервые сделано Л. Г. Магнарадзе. Впоследствии в работах Ю. М. Крикунова и В. С. Рогожина были получены представления, значительно упростившие исследования этой задачи. Р. С. Исаханов показал, что для таких уравнений справедливы теоремы, аналогичные теоремам Нётера, а также обобщил задачу на случай нескольких разомкнутых контуров и разрывных коэффициентов. Н. П. Векуа указал способ решения сингулярных интегродифференциальных уравнений путем сведения их к задаче Коши для сингулярных интегральных уравнений.

Здесь уместно подчеркнуть, что, хотя метод Векуа позволяет сводить сингулярные интегродифференциальные уравнения к сингулярным интегральным уравнениям, проблема методов приближенного решения сингулярных интегродифференциальных уравнений, как самостоятельная, не снимается. В качестве основных причин этого обстоятельства можно указать следующие: во-первых, разработка и обоснование методов приближенного решения сингулярных интегродифференциальных уравнений без их сведения к сингулярным интегральным уравнениям нужны потому, что сам процесс сведения с вычислительной точки зрения может оказаться сложным и нежелательным, и, во-вторых, положительное решение указанной проблемы может позволить обосновать ряд методов в применении к более широким классам сингулярных интегродифференциальных уравнений, в частности, к тем разновидностям сингулярных интегродифференциальных уравнений, для которых сведение к сингулярным уравнениям пока неизвестно или невозможно в принципе.

Бурное развитие теории сингулярных интегральных уравнений и сингулярных интегродифференциальных уравнений в последующие годы, их связь с краевыми задачами и многочисленные приложения в теории упругости, гидромеханике и многих разделах математической физики усилили внимание математиков к методам приближенного решения этих уравнений и к проблемам обоснования этих методов.

Далее во введении дан обзор близких по тематике работ, аннотированы выполненные исследования, отмечены их результаты.

Каждая глава диссертационной работы, начиная со второй, начинается с краткого изложения истории возникновения и развития задач, рассматриваемых в этой главе. Здесь же даны ссылки на оригинальные работы других авторов.

Глава 1 "Сингулярные интегральные уравнения и их свойства" носит вспомогательный характер. В ней приведены определения основных понятий, используемых в дальнейшем изложении, а также основные обозначения. Даны определения и свойства пространств функций, удовлетворяющих условию Гёльдера, пространств функций, суммируемых с весом, а также одномерных и многомерных пространств Соболева. Затем приводятся система обозначений для регулярных и сингулярных интегралов с ядрами Коши и Гильберта и некоторые их свойства. Для всех видов сингулярных интегралов даны формулы Племеля-Сохоцкого. Показано, как изменяются эти формулы при переходе от одного функционального пространства к другому.

В §1.2 рассматриваются сингулярные интегральные и интегродифференциальные уравнения с ядром Гильберта в одномерном случае. Указываются свойства и условия разрешимости (если таковые имеются) этих уравнений.

В §1.3 приводятся свойства одномерных псевдодифференциальных уравнений в пространствах Соболева. Указывается связь между сингулярными интегральными и интегродифференциальными уравнениями с ядром Гильберта и псевдодифференциальными уравнениями в пространствах Соболева. Дается определение эллиптических псевдодифференциальных уравнений и указываются условия их разрешимости.

§1.4 посвящен основным свойствам двумерных сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений с ядром Гильберта. Двумерный случай рассматривается лишь для простоты выкладок. Все приводимые здесь результаты без труда переносятся на случай $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$, измерений. Приводятся условия разрешимости для частных случаев уравнений.

В §1.5 рассматриваются сингулярные интегральные и интегродифференциальные уравнения с ярдом Коши на разомкнутом контуре. Для простоты изложения, а также из-за наличия многочисленных приложений, в качестве контура выбран отрезок $[-1, 1]$. Дается определение индекса и канонической функции уравнения. Приводятся условия существования и единственности решения уравнений нулевого, положительного и отрицательного индексов.

Глава 2 "Аналитический подход в построении квадратурно-разностных методов" посвящена исследованию аналитических квадратурно-разностных методов решения сингулярных интегродифференциальных уравнений. Здесь рассмотрены метод сплайн-коллокаций и полиномиальный метод коллокаций, в котором в качестве агрегата аппроксимации точного решения уравнения используються тригонометрические полиномы с кратными узлами. В обоих случаях вычислительные схемы оказываются квадратурно-разностными, то есть интегралы аппроксимируются квадратурными суммами, а производные – конечными разностями.

В §2.1 содержатся необходимые для обоснования сведения и теоремы одного варианта общей теории приближенных методов, разработанного Б. Г. Габдулхаевым.

В §2.2 рассматривается один частный случай сингулярного интегро-дифференциального уравнения вида

$$x^{(m)}(t)+\sum_{\nu=0}^{m-1}\left(a_\nu(t)x^{(\nu)}(t)+\frac{b_\nu(t)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x^{(\nu)}(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}d\tau\right)+\gamma=y(t) \quad (2.2.1)$$

с условием

$$\int_0^{2\pi}x(\tau)d\tau=0, \quad (2.2.2)$$

где $x(t)$ – искомая 2π-периодическая комплекснозначная функция, γ – искомое комплексное число, $a_\nu(t)$, $b_\nu(t)$, $\nu=0,1,...,m-1$, и $y(t)$ – известные 2π-периодические комплекснозначные функции, а сингулярные интегралы с ядром Гильберта

$$(Jx^{(\nu)})(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}x^{(\nu)}(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}d\tau,\ \nu=0,1,...,m,$$

понимаются здесь и далее в смысле главного значения по Коши-Лебегу.

Вначале устанавливаются условия существования и единственности решения задачи (2.2.1), (2.2.2). Показано (теорема 2.1), что при любых непрерывных коэффициентах $a_\nu,\ b_\nu,\ \nu=1,2,...,m-1$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\nu=0}^{m-1}(\|a_\nu\|_{\mathrm{C}}+\|b_\nu\|_{\mathrm{C}})<1,$$

задача (2.2.1), (2.2.2) имеет единственное решение при любой правой части y из пространства Соболева H^0.

Затем строится вычислительная схема метода. Приближенное решение задачи (2.2.1), (2.2.2) ищется в виде пары $\mathbf{x}_n = (x_n, \gamma_n)$, где

$$x_n(t) = \sum_{k=-r_m}^{2n+s_m} x_k \phi_k^m(t), \tag{2.2.7}$$

– сплайн порядка m, а γ_n – искомое комплексное число. Неизвестные коэффициенты $x_k,\ k = -r_m, .., 2n + s_m$, сплайна (2.2.7) и число γ_n находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$x_n^{(m)}(t_k) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(a_\nu(t_k) x_n^{(\nu)}(t_k) + \frac{b_\nu(t_k)}{2n+1} \sum_{j=o}^{2n} \alpha_{k-j} x_n^{(\nu)}(t_j) \right) + \gamma_n = \tag{2.2.8}$$

$$= y(t_k), \quad k = 0, 1, ..., 2n,$$

$$x_k = x_{2n+k+1}, \quad k = -r_m, -r_m + 1, ..., s_m - 1,$$

$$\sum_{k=0}^{2n} x_k = 0.$$

Здесь

$$t_k = \frac{2\pi k}{2n+1}, \qquad k = 0, 1, ..., 2n, \tag{2.2.9}$$

– равноотстоящие узлы на интервале $[0, 2\pi]$, а коэффициенты $\alpha_{k-j} = \alpha_{k-j}^{(n)}$ равны

$$\alpha_{k-j}^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{(k-j)\pi}{2(2n+1)}, & k-j \text{ – четно}, \\ -\operatorname{ctg} \dfrac{(k-j)\pi}{2(2n+1)}, & k-j \text{ – нечетно}. \end{cases} \tag{2.2.10}$$

Наконец, для всех однозначно разрешимых задач вида (2.2.1), (2.2.2) доказана (теорема 2.2) сходимость метода (2.2.6)–(2.2.10), и получена оценка погрешности приближенного решения.

В уравнении (2.2.1) порядок старшей производной искомой функции вне сингулярного интеграла выше, чем порядок старшей производной этой функции под интегралом. Такие уравнения, хотя и содержат сингулярные интегралы, подчиняются теории интегральных уравнений Фредгольма, а не Нётера. Обосновать тем же способом этот квадратурно-разностный метод для уравнений, имеющих равный порядок старших производных вне и под сингулярным интегралом, не-удается. Поэтому в §2.3 для таких уравнений построен и обоснован квадратурно-разностный метод, основанный на аппроксимации точного решения тригонометрическими интерполяционными полиномами с кратными узлами. Приведем основной результат этого параграфа.

Рассмотрим сингулярное интегродифференциальное уравнение первого порядка

$$\sum_{\nu=0}^{1}(a_\nu(t)x^{(\nu)}(t)+\frac{b_\nu(t)}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^{(\nu)}(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}d\tau+ \tag{2.3.1}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_\nu(t,\tau)x^{(\nu)}(\tau)d\tau)=y(t)$$

с условием

$$x(0)=x(2\pi), \tag{2.3.2}$$

где $x(t)$ – искомая, $a_\nu(t)$, $b_\nu(t)$, $h_\nu(t,\tau)$ (по обеим переменным), $\nu=0,1$, и $y(t)$ – известные непрерывные 2π-периодические функции.

Приближенное решение задачи (2.3.1), (2.3.2) будем искать в виде тригонометрического полинома

$$\bar{x}_n(t)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}([\mathbf{x}_{2n}]_{2k}+[\bar{D}_{2n}\mathbf{x}_{2n}]_{2k}\sin(t-t_{2k}))\frac{\sin^2\frac{n}{2}(t-t_{2k})}{\sin^2\frac{t-t_{2k}}{2}},$$

удовлетворяющего условиям

$$\bar{x}_n(t_{2k})=[\mathbf{x}_{2n}]_{2k},\ \bar{x}_n'(t_{2k})=[\bar{D}_{2n}\mathbf{x}_{2n}]_{2k},\quad k=0,1,...,n-1,$$

в четных узлах сетки

$$t_k=\frac{\pi k}{n},\quad k=0,1,...,2n-1. \tag{2.3.4}$$

Здесь

$$[\bar{D}_{2n}\mathbf{x}_{2n}]_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{h},\ k = 0, 1, ..., 2n-2,$$

$$[\bar{D}_{2n}\mathbf{x}_{2n}]_{2n-1} = \frac{x_0 - x_{2n-1}}{h},\ h = \frac{\pi}{n}$$

простейшие формулы численного дифференцирования, а $\mathbf{x}_{2n}$ – вектор приближенных значений

$$[\mathbf{x}_{2n}]_k = x_k,\ k = 0, 1, ..., 2n-1,$$

искомой функции в узлах сетки (2.3.4). Они находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=0}^{1} (a_\nu(t_k)\bar{x}_n^{(\nu)}(t_k) + b_\nu(t_k)(J\bar{x}_n^{(\nu)})(t_k) + \tag{2.3.37}$$

$$+(J^0 P_{2n}^{\tau}(h_\nu \bar{x}_n^{(\nu)}))(t_k)) = f(t_k), \quad k = 0, 1, ..., 2n-1,$$

где P_{2n}^{τ} – примененный по переменной τ тригонометрический интерполяционный оператор Лагранжа по узлам (2.3.4), а

$$J^0 x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\tau) d\tau$$

регулярный интеграл.

Доказано (теорема 2.4), что для уравнения (2.3.1) с коэффициентами удовлетворяющими условию Гёльдера с некоторым показателем $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \le 1$, система уравнений (2.3.37) однозначно разрешима для всех достаточно больших n, и приближенные решения $\mathbf{x}_{2n}^*$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ задачи (2.3.1), (2.3.2) в узлах (2.3.4) при $n \to \infty$ со скоростью

$$\|p_{2n}x^* - \mathbf{x}_{2n}^*\|_{\mathrm{H}_{\beta,2n}^{(1)}} \le c(n^{-\alpha+\beta}\ln n + \varepsilon_n), \quad 0 < \beta < \alpha \le 1,$$

где

$$\varepsilon_n = \|\bar{D}_{2n}p_{2n}x^* - q_{2n}x^{*\prime}\|_{\mathrm{H}_{\beta,2n}}, \quad \mathrm{H}_{\beta,2n} = \mathrm{H}_{\beta,2n}^{(0)},$$

$$p_{2n}x = (x(t_0), x(t_1), ..., x(t_{2n-1})), \quad p_{2n} : \mathrm{H}_\beta^{(1)} \to \mathrm{H}_{\beta,2n}^{(1)},$$

$$q_{2n}x' = (x'(t_0), x'(t_1), ..., x'(t_{2n-1})), \quad q_{2n} : \mathrm{H}_\beta \to \mathrm{H}_{\beta,2n}.$$

Глава 3 "Численный подход в построени квадратурно-разностных методов" диссертационной работы посвящена построению и исследованию квадратурно-разностных методов решения линейных и нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений в пространствах Гёльдера и линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и правой частью в пространствах квадратично суммируемых функций. Здесь для обоснования рассматриваемых методов наряду с результатами Б. Г. Габдулхаева существенно используются результаты варианта теории приближенных методов, разработанного Г. М. Вайникко.

В §3.1 содержатся необходимые сведения и теоремы теории Г. М. Вайникко. Сами эти теоремы и их использование для обоснования численных приближенных методов существенно сложнее, чем аналогичные теоремы теории обоснования аналитических методов. Это связано с тем, что здесь не предполагается выполнение условия $X_n \subset X$. Оно заменено более слабым условием наличия так называемых "связывающих отображений" (терминология Г. М. Вайникко) $p_n : X \to X_n$, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, позволяющим определить различные виды сходимости как для элементов основных пространств, так и для определенных на них операторов.

В §3.2 обоснован квадратурно-разностный метод для полных линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с ядром Гильберта вида

$$\sum_{\nu=0}^{m} (a_\nu(t)x^{(\nu)}(t) + \frac{b_\nu(t)}{2\pi}\int_0^{2\pi} x^{(\nu)}(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}d\tau + \qquad (3.2.1)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h_\nu(t,\tau)x^{(\nu)}(\tau)d\tau) = y(t)$$

с условиями

$$x^{(\nu)}(0) = x^{(\nu)}(2\pi), \quad \nu = 0,1,...,m-1, \tag{3.2.2}$$

где $x(t)$ – искомая, $a_\nu(t)$, $b_\nu(t)$, $h_\nu(t,\tau)$ (по обеим переменным), $\nu = 0,1,$ $...,m$, и $y(t)$ – известные непрерывные 2π-периодические функции.

Вычислительная схема метода строится следующим образом. Выберем $n \in \mathbb{N}$. Введем на $[0,2\pi]$ сетку равноотстоящих узлов

$$t_k = \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0,1,...,n-1. \tag{3.2.3}$$

Приближенное решение задачи (3.2.1), (3.2.2) будем искать в виде вектора

$$\mathbf{x}_n = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}), \tag{3.2.4}$$

компоненты которого $[\mathbf{x}_n]_k = x_k$, $k = 0,1,...,n-1$, – приближенные значения искомой функции в узлах (3.2.3) – найдем из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{\nu=o}^{m}(a_\nu(t_k)[D_n^\nu \mathbf{x}_n]_k + \frac{b_\nu(t_k)}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\alpha_{k-l}[D_n^\nu \mathbf{x}_n]_l + \tag{3.2.5}$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}h_\nu(t_k,t_l)[D_n^\nu \mathbf{x}_n]_l) = y(t_k), \quad k = 0,1,...,n-1.$$

Здесь $D_n^\nu \mathbf{x}_n$, $\nu = 0,1,...,m$, – формулы численного дифференцирования, определенные на сетке (3.2.3)

$$[D_n^\nu \mathbf{x}_n]_k = h^{-\nu}\sum_{j=-r_\nu}^{s_\nu} c_{\nu j}x_{k+j}, \ h = \frac{2\pi}{n}, \ \nu = 0,1,...,m, \tag{3.2.6}$$

$$x_{k+j} = \begin{cases} x_{k+j+n}, & k+j < 0 \\ x_{k+j-n}, & k+j \geq n, \end{cases} \quad k = 0,1,...,n-1,$$

а коэффициенты квадратурных сумм $\alpha_{k-l} = \alpha_{k-l}^{(n)}$, $k, l = 0, 1, ..., n-1$, равны

$$\alpha_r^{(n)} = \{\operatorname{tg}\frac{r\pi}{2n},\ r - \text{четно}, \quad -\operatorname{ctg}\frac{r\pi}{2n},\ r - \text{нечетно}\}, \quad n - \text{нечетно};$$

$$\alpha_r^{(n)} = \{0,\ r - \text{четно}, \quad 2\operatorname{ctg}\frac{r\pi}{2n},\ r - \text{нечетно}\}, \quad n - \text{четно}.$$

Сформулируем основной результат этого параграфа.

Теорема 3.2. *Пусть для задачи (3.2.1), (3.2.2) и вычислительной схемы (3.2.3) – (3.2.6) выполнены следующие условия:*

A1 *функции $a_\nu(t)$, $b_\nu(t)$, $h_\nu(t,\tau)$ (по обеим переменным), $\nu = 0, 1, ...,$ m, и $y(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым показателем $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \leq 1$,*

A2 $a_m^2(t) + b_m^2(t) \neq 0$ *на* $[0, 2\pi]$,

A3 $\kappa = \operatorname{ind}(a_m(t) - ib_m(t)) = \operatorname{ind}(a_m(t) + ib_m(t)) = 0$,

A4 *задача (3.2.1), (3.2.2) имеет единственное решение $x^*(t) \in \mathrm{H}_\beta^{(m)}$ при любой правой части $y(t) \in \mathrm{H}_\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < \alpha$,*

B1 *формулы численного дифференцирования $D_n^\nu \mathbf{x}_n$, $\nu = 0, 1, ..., m$, сходятся,*

B2 *характеристические значения оператора D_n^m по модулю отличны от 1.*

Тогда при достаточно больших n система уравнений (3.2.5) однозначно разрешима и приближенные решения $\mathbf{x}_n^*$ сходятся к точному решению $x^*(t)$ задачи (3.2.1), (3.2.2) при $n \to \infty$ со скоростью

$$\|\mathbf{x}_n^* - p_n x^*\|_{\mathrm{H}_{\beta,n}^{(m)}} \leq c(n^{-\alpha+\beta}\ln n + \varepsilon_n),$$

где

$$\varepsilon_n = \max_{0\leq\nu\leq m} \|D_n^\nu p_n x^* - q_n x^{*(\nu)}\|_{\mathrm{H}_{\beta,n}}.$$

В §3.3 строится и обосновывается квадратурно-разностный метод для нелинейного сингулярного интегродифференциального уравнения вида

$$F(t, x^{(m)}, ..., x(t), (Jx^{(m)})(t), ..., (Jx)(t), \tag{3.3.1}$$

$$(J^0 h_m x^{(m)})(t), ..., (J^0 h_0 x)(t)) = y(t),$$

с условиями

$$x^{(\nu)}(0) = x^{(\nu)}(2\pi), \quad \nu = 0, 1, ..., m-1, \tag{3.3.2}$$

где $x(t)$ – искомая, $F(t, u_m, ..., u_o, v_m, ..., v_0, w_m, ..., w_0)$, $h_\nu(t, \tau)$, $\nu = 0, 1, ..., m$ и $y(t)$ – известные 2π-периодические по переменным t и τ непрерывные функции своих аргументов, J и J^0 обозначают, как и выше, сингулярный интеграл с ядром Гильберта и регулярный интеграл соответственно.

Вычислительная схема метода строится следующим образом. Выберем $n \in \mathbb{N}$. Введем на $[0, 2\pi]$ сетку равноотстоящих узлов

$$t_k = \frac{2\pi k}{n}, \ k = 0, 1, .., n-1. \tag{3.3.3}$$

Приближенное решение задачи (3.3.1), (3.3.2) будем искать в виде вектора

$$\mathbf{x}_n = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}), \tag{3.3.4}$$

компоненты которого $[\mathbf{x}_n]_k = x_k$, $k = 0, 1, ..., n-1$, – приближенные значения искомой функции в узлах (3.3.3) – найдем из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$F(t_k, [D_n^m \mathbf{x}_n]_k, ..., [D_n^0 \mathbf{x}_n]_k, \tag{3.3.5}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{k-l}[D_n^m \mathbf{x}_n]_l, ..., \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_{k-l}[D_n^0 \mathbf{x}_n]_l,$$

$$\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} h_m(t_k, t_l)[D_n^m \mathbf{x}_n]_l, ..., \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} h_0(t_k, t_l)[D_n^0 \mathbf{x}_n]_l) = y(t_k),$$

$$k = 0, 1, ..., n-1.$$

Здесь, как и в (3.2.5), D_n^ν, $\nu = 0, 1, ..., m$, – разностные операторы, определяемые формулами численного дифференцирования (3.2.6), а значения коэффициентов $\alpha_{k-l} = \alpha_{k-l}^{(n)}$, как и в предыдущем параграфе, равны

$$\alpha_r^{(n)} = \{\operatorname{tg}\frac{r\pi}{2n},\ r - \text{четно}, \quad -\operatorname{ctg}\frac{r\pi}{2n},\ r - \text{нечетно}\}, \quad n - \text{нечетно};$$

$$\alpha_r^{(n)} = \{0,\ r - \text{четно}, \quad 2\operatorname{ctg}\frac{r\pi}{2n},\ r - \text{нечетно}\}, \quad n - \text{четно}.$$

Для вычислительной схемы (3.3.3) – (3.3.5) задачи (3.3.1), (3.3.2) справедлива следующая

Теорема 3.3. *Пусть выполнены следующие условия:*

А1 *функции $h_\nu(t,\tau)$ (по обеим переменным), $\nu = 0, 1, ..., m$, и $y(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым показателем $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha \le 1$,*

А2 *задача (3.3.1), (3.3.2) в некотором шаре пространства $\mathrm{H}_\beta^{(m)}$ имеет единственное решение $x^*(t) \in \mathrm{H}_\alpha^{(m)}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \beta < \alpha \le 1$,*

А3 *функция $F(t, u_m, ..., u_0, v_m, ..., v_0, w_m, ..., w_0)$ непрерывно дифференцируема по переменным u_ν, v_ν, w_ν, $\nu = 0, 1, ..., m$, в области*

$$\mid t \mid < \infty, \quad \mid u_\nu - x^{*(\nu)}(t) \mid \le c, \quad \mid v_\nu - (Jx^{*(\nu)})(t) \mid \le c,$$

$$\mid w_\nu - (J^0 h_\nu x^{*(\nu)})(t) \mid \le c, \quad \nu = 0, 1, ..., m,$$

и ее частные производные F'_{u_ν}, F'_{v_ν}, F'_{w_ν}, $\nu = 0, 1, ..., m$, удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α по переменной t и условию Липшица по переменным u_ν, v_ν, w_ν, $\nu = 0, 1, ..., m$,

А4 $F'^2_{u_m}(x^*) + F'^2_{v_m}(x^*) \ne 0$ *на* $[0, 2\pi]$,

А5 $\kappa = \operatorname{ind}(F'_{u_m}(x^*) + iF'_{v_m}(x^*)) = 0$,

А6 *линеаризованная задача*

$$\sum_{\nu=0}^{m}(F'_{u_\nu}(x^*)x^{(\nu)}(t) + F'_{v_\nu}(x^*)(Jx^{(\nu)})(t) + F'_{w_\nu}(x^*)(J^0 h_\nu x^{(\nu)})(t)) = 0, \quad (3.3.6)$$

$$x^{(\nu)}(0) = x^{(\nu)}(2\pi), \quad \nu = 0, 1, ..., m-1, \tag{3.3.7}$$

имеет в $H_\beta^{(m)}$ *лищь нулевое решение,*

B1 *формулы численного дифференцирования* $D_n^\nu \mathbf{x}_n$, $\nu = 0, 1, ..., m$, *сходятся,*

B2 *характеристичекие значения оператора* D_n^m *по модулю отличны от 1.*

Тогда при достаточно больших n *система уравнений (3.3.5) однозначно разрешима в некотором шаре*

$$\|\mathbf{x}_n - p_n x^*\|_{\mathrm{H}_{\beta,n}^{(m)}} \leq c$$

и приближенные решения $\mathbf{x}_n^* \in \mathrm{H}_{\beta,n}^{(m)}$ *сходятся к точному решению* $x^*(t) \in \mathrm{H}_\beta^{(m)}$ *задачи (3.3.1), (3.3.2) при* $n \to \infty$ *со скоростью*

$$\|\mathbf{x}_n^* - p_n x^*\|_{\mathrm{H}_{\beta,n}^{(m)}} \leq c(n^{-\alpha+\beta} \ln n + \varepsilon_n),$$

где

$$\varepsilon_n = \max_{0 \leq \nu \leq m} \|D_n^\nu p_n x^* - q_n x^{*(\nu)}\|_{\mathrm{H}_{\beta,n}}.$$

В §3.4 предложен и обоснован квадратурно-разностный метод решения линейного сингулярного интегродифференциального уравнения в пространстве квадратично суммируемых функций. При этом коэффициенты характеристической части удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым показателем $0 < \alpha \leq 1$, а остальные коэффициенты и правая часть уравнения могут иметь интегрируемые разрывы. Точным решением уравнения в этом случае будет функция, старшая производная которой квадратично суммируема.

В вычислительной схеме метода, в отличие от метода, рассмотренного в §3.2, используются не значения коэффициентов в узлах, а их средние значения (по Стеклову) на промежутке между узлами.

Доказана (теорема 3.6) разрешимость метода и получена оценка погрешности приближенного решения

$$\|p_n x^* - \mathbf{x}_n^*\|_{\mathrm{W}_{2,n}^{(m)}} \leq c(n^{-\alpha} + \sum_{\nu=0}^{m}(\omega_\tau(h_\nu; \frac{1}{n})_2 + \omega(x^{*(\nu)}; \frac{1}{n})_2) + \varepsilon_n),$$

$$\varepsilon_n = \max_{0\leq\nu\leq m} \|D_n^{(\nu)} p_n x^* - q_n x^{*(\nu)}\|_{\mathrm{L}_{2,n}},$$

$$\omega_\tau(h_\nu; \delta)_2 = \| \sup_{0\leq\eta\leq\delta} \{\int_0^{2\pi} | \, h_\nu(t, \tau + h) - h_\nu(t, \tau) \, |^2 \, d\tau\}^{\frac{1}{2}} \|_{\mathrm{L}_2}.$$

В **главе 4 "Приближенныне методы решения псевдодифференциальных уравнений"** рассматриваются приближенные методы решения псевдодифференциальных уравнений. Псевдодифференциальные уравнения являются обобщением сингулярных интегродифференциальных уравнений и наследуют их свойства. Поэтому результаты по приближенным методам решения последних могут быть перенесены на случай псевдодифференциальных уравнений. В то же время псевдодифференциальные уравнения рассматриваются в пространствах Соболева, что позволяет получать более сильные результаты, не имеющие аналогов в других пространствах.

В §4.1 приводятся вспомогательные результаты, необходимые для обоснования полиномиального метода коллокаций. В частности, доказывается равносильность полиномиального метода коллокаций и модифицированного метода Галеркина.

В §4.2 обосновывается полиномиальный метод коллокации для сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта. Однако сам сингулярный интеграл с ядром Гильберта в тексте этого параграфа не присутствует, потому что, как показал М. С. Агранович, сингулярный интегральный оператор с ядром Гильберта в пространствах Соболева равен, с точностью до вполне непрерывного слагаемого, разности рядов Фурье по положительным и отрицательным индексам. Поэтому здесь сингулярный интегральный оператор представляется именно в таком виде.

Доказано, что полиномиальный метод коллокаций для сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта в пространствах Соболева имеет погрешность порядка наилучшего приближения точного решения, то есть является оптимальным по порядку.

В §4.3 результаты предыдущего параграфа обобщаются на случай псевдодифференциальных уравнений, а в §4.4 – на случай систем псевдодифференциальных уравнений.

В **главе 5 "Кубатурно-разностный метод решения многомерных уравнений** обосновывается кубатурно-разностный метод для многомерных сингулярных интегродифференциальных уравнений в периодическом случае.

В §5.1 проводится исследование аппроксимативных свойств интерполяционного оператора Лагранжа в многомерном пространстве Соболева. В частности доказывается следующая теорема об оценке нормы интерполяционного оператора Лагранжа в пространствах Соболева.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$, $s > m/2$ и $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m) \in \mathbb{N}^m$. Обозначим через

$$\mathbf{I_n} = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{I}_{n_j} \qquad \mathrm{I}_{n_j} = \{k_j \mid k_j \in \mathbb{Z}, \ \mid k_j \mid \leq n_j\}, \ j = 1, 2, ..., m,$$

индексное множество и введем на $\mathbf{\Delta} = [-\pi, \pi]^m$ сетку узлов

$$\mathbf{\Delta_n} = \{\mathbf{t_k} = (t_{k_1}, t_{k_2}, ..., t_{k_m}) \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_m) \in \mathbf{I_n},$$

$$t_{k_j} = k_j h_j, \ h_j = \frac{2\pi}{2n_j + 1}, \ j = 1, 2, ..., m\}.$$

Обозначим через

$$(P_{\mathbf{n}} u)(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{I_n}} u(\mathbf{t_k}) \xi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{t_k}),$$

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, ..., \tau^{(m)}) \in \boldsymbol{\Delta}, \quad \mathbf{t_k} = (t_{k_1}, t_{k_2}, ..., t_{k_m}) \in \boldsymbol{\Delta}_\mathbf{n},$$

интерполяционный полином Лагранжа функции $u \in \mathrm{H}^s$ по узлам $\boldsymbol{\Delta}_\mathbf{n}$. Здесь

$$\xi_\mathbf{n}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{t_k}) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\sin((2n_j+1)(\tau^{(j)} - t_{k_j})/2)}{(2n_j+1)\sin((\tau^{(j)} - t_{k_j})/2)} = [2\mathbf{n}+\mathbf{1}]^{-1} \sum_{\mathbf{l}\in\mathbf{I_n}} e_\mathbf{l}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{t_k}),$$

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m) \in \mathbb{N}^m, \quad \mathbf{1} = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{N}^m,$$

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau^{(1)}, \tau^{(2)}, ..., \tau^{(m)}) \in \boldsymbol{\Delta}, \quad \mathbf{t_k} = (t_{k_1}, t_{k_2}, ..., t_{k_m}) \in \boldsymbol{\Delta}_\mathbf{n},$$

– фундаментальные полиномы, удовлетворяющие условиям

$$\xi_\mathbf{n}(\mathbf{t_l}, \mathbf{t_k}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{l} = \mathbf{k}, \\ 0, & \mathbf{l} \neq \mathbf{k}, \quad \mathbf{l}, \mathbf{k} \in \mathbf{I_n}. \end{cases}$$

Теорема 5.1. *Для любых $s \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $s > m/2$ и $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$ верна оценка*

$$\|P_\mathbf{n}\|_{\mathrm{H}^s \to \mathrm{H}^s} \leq 2^{\frac{m-s}{2}} m^{\frac{s+1}{2}} M(\mathbf{n}, s) \sqrt{1 + \zeta(2s - m + 1)},$$

где

$$M(\mathbf{n}, s) = \left(\frac{\sqrt{\mathbf{n}^2}}{\min(\mathbf{n})} \right)^s,$$

а $\zeta(t) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} j^{-t}$ – дзета-функция Римана.

В §5.2 обосновывается кубатурно-разностный метод для полного двумерного сингулярного интегродифференциального уравнения вида

$$(ABx)(\mathbf{t}) + (Tx)(\mathbf{t}) = y(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} = (t^{(1)}, t^{(2)}) \in [-\pi, \pi]^2,$$

где A – двумерный сингулярный интегральный оператор

$$Ax \equiv a_{00}(\mathbf{t})x(\mathbf{t}) + a_{01}(\mathbf{t})(J_{01}x)(\mathbf{t}) + a_{10}(\mathbf{t})(J_{10}x)(\mathbf{t}) + a_{11}(\mathbf{t})(J_{11}x)(\mathbf{t})$$

с сингулярными интегралами

$$(J_{01}x)(\mathbf{t}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x(t^{(1)}, \tau^{(2)}) \operatorname{ctg} \frac{\tau^{(2)} - t^{(2)}}{2} d\tau^{(2)},$$

$$(J_{10}x)(\mathbf{t}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x(\tau^{(1)}, t^{(2)}) \operatorname{ctg} \frac{\tau^{(1)} - t^{(1)}}{2} d\tau^{(1)},$$

$$(J_{11}x)(\mathbf{t}) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x(\tau^{(1)}, \tau^{(2)}) \operatorname{ctg} \frac{\tau^{(1)} - t^{(1)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{\tau^{(2)} - t^{(2)}}{2} d\tau^{(2)} d\tau^{(1)},$$

понимаемыми в смысле главного значения по Коши-Лебегу, B – эллиптический дифференциальный оператор

$$Bx \equiv \sum_{|\mathbf{k}|=|\mathbf{l}|=m} b_{\mathbf{kl}}(\mathbf{t})(D^{\mathbf{k}+\mathbf{l}}x)(\mathbf{t})$$

с обобщенными производными

$$D^{\mathbf{k}} = D^{k_2} D^{k_1}, \text{ порядка } \mathbf{k} = (k_1, k_2) \in \mathbf{N}_0,$$

а T – известный линейный оператор. Доказана (теорема 5.2) сходимость метода и получены оценки погрешности приближенного решения.

Глава 6 "Квадратурно-разностный метод решения уравнений на разомкнутом контуре" посвящена разработке и обоснованию квадратурно-разностного метода решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши на разомкнутом контуре.

В §6.1 квадратурно-разностный метод строится и обосновывается для уравнений нулевого индекса вида

$$\sum_{\nu=0}^{m} (a_\nu(t)x^{(\nu)}(t) + \frac{b_\nu(t)}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^{(\nu)}(\tau)d\tau}{\tau - t} +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} h_\nu(t,\tau)x^{(\nu)}(\tau)d\tau) = y(t), \ -1 < t < 1,$$

с начальными условиями

$$x^{(\nu)}(\xi_0) = 0, \qquad \nu = 0, 1, ..., m-1, \qquad -1 \le \xi_0 \le 1,$$

где $x(t)$ – искомая, $a_\nu(t), b_\nu(t), h_\nu(t,\tau)$, $\nu = 0, 1, ...m$, $y(t)$ – известные непрерывные функции своих аргументов $t, \tau \in [-1, 1]$, $b_m(t)$ является полиномом степени $n_0 \geq 0$.

В §6.2 указываются изменения в постановке, вычислительной схеме и обосновании метода в случае уравнений положительного и отрицательного индексов.

В заключении подведены итоги выполненных исследований и намечены направления дальнейших исследований по данной теме.

В приложении приведены примеры решения нескольких модельных задач предлагаемыми методами и оценены полученные результаты.

Список опубликованных работ по теме диссертации

Работы 5, 6, 7, 9, 10, 14, 22, 26, 29, 33, 37 - из перечня российских научных журналов рекомендованных ВАК РФ для публикаций результатов докторских диссертаций.

1. Федотов, А. И. Решение одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений квадратурно-разностным методом / А. И. Федотов ; Ред. "Изв. вузов. Математика." – Казань, 1983. – 12 с. – Библиогр.: с. 11. – Деп. в ВИНИТИ 14.2.83, №1606.

2. Федотов, А. И. Аппроксимация решений одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений тригонометрическими полиномами с кратными узлами / А. И. Федотов ; Казан. ун-т. – Казань, 1986. – 13 с. – Библиогр.: с. 12. Деп. в ВИНИТИ 28.3.86, №2483 – В86.

3. Федотов, А. И. Квадратурно-разностный метод для линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений / А. И. Федотов

// Тез. докл. всесоюз. симпоз.: Метод дискретных особенностей в задачах математической физики и его роль в развитии численного эксперимента на ЭВМ, 14 – 16 мая 1987 г. – Харьков, 1987. – С. 166-168.

4. Федотов, А. И. Квадратурно-разностный метод для решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / А. И. Федотов // Тез. докл. всесоюз. симпоз.: Методы дискретных особенностей в задачах математической физики, 23 – 29 мая 1989 г. – Харьков, 1989. – С. 271-271.

5. Федотов, А. И. Об одном подходе к построению квадратурно-разностного метода решения сингулярных интегродифференциальных уравнений / А. И. Федотов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, №7. – С. 978-986.

6. Федотов, А. И. О сходимости квадратурно-разностного метода для одного класса сингулярных интегро-дифференциальных уравнений / А. И. Федотов // Изв. вузов. Математика. – 1989. – №8. – С. 64-68.

7. Федотов, А. И. О сходимости квадратурно-разностного метода для линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений / А. И. Федотов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1989. – Т. 29, №9. – С. 1301-1308.

8. Федотов, А. И. Квадратурно-разностные методы решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.01 защищена 19.11.90 : утв. 27.02.91 / Федотов Александр Иванович. – Казань, 1990. – 110 с. – Библиогр.: с. 100-110.

9. Федотов, А. И. О сходимости квадратурно-разностного метода для линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / А. И. Федотов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1991. – Т. 31, №2. – С. 261-271.

10. Федотов, А. И. О сходимости квадратурно-разностного метода для нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений / А. И. Федотов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1991. – Т. 31, №5. – С. 781-787.

11. Федотов, А. И. Квадратурно-разностный метод для нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений / А. И. Федотов // Тез. докл. V Всесоюзного симпозиума: Метод дискретных особенностей в задачах математической физики, 15 – 19 сентября 1991 г., Часть II. – Одесса, 1991. – С. 59-61.

12. Федотов, А. И. Квадратурно-разностный метод для линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на отрезке/ А. И. Федотов // Тез. докл. международ. конференции: Алгебра и анализ, посвященной 100-летию со дня рождения Н. Г. Чеботарева, 5 – 11 июня 1994 г. – Казань, 1994. – С. 133-134.

13. Федотов, А. И. Сходимость квадратурно-разностного метода для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на интервале/ А. И. Федотов // Тез. докл. школы конференции: Теория функций и ее приложения, 15 – 22 июня 1995 г. – Казань, 1995. – С. 68-69.

14. Федотов, А. И. Сходимость квадратурно-разностного метода для одного класса линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на отрезке / А. И. Федотов // Изв. вузов. Математика. – 1997. – №3. – С. 73-76.

15. Федотов, А. И. Об асимптотической сходимости полиномиального метода коллокаций для периодических сингулярных интегральных и псевдодифференциальных уравнений / А. И. Федотов ; Ред. "Изв. вузов. Математика." – Казань, 1998. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.10.97, №2477 – В98.

16. Федотов, А. И. О классах псевдодифференциальных уравнений разрешимых методами Галеркина и коллокаций / А. И. Федотов // Тез. докл. международ. конференции: Дифференциальные и интегральные уравнения, 12 – 14 сентября 2000 г. – Одесса, 2000. – С. 279-280.

17. Федотов, А. И. Классы уравнений, разрешимые методами Галеркина и коллокаций/ А. И. Федотов // Тез. докл. международ. конференции: Dynamical systems modelling and stability investigation, 22 – 25 мая 2001 г. – Киев, 2001. – С. 102.

18. Федотов, А. И. Кубатурно-разностный метод для многомерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений / А. И. Федотов // Труды Матем. центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 11. / Казан. матем. общество. – Казань: УНИПРЕСС, 2001. – С. 263-266.

19. Федотов, А. И. О классах уравнений, разрешимых методами Галеркина и коллокаций / А. И. Федотов // Труды Матем. центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 11. / Казан. матем. общество. – Казань: УНИПРЕСС, 2001. – С. 267-268.

20. Федотов, А. И. Численно-аналитические методы решения операторных уравнений / А. И. Федотов // На рубеже веков. Научно-исследовательский институт математики и механики им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета. 1998 – 2002

гг. – Казань: Издательство Казан. матем. общества, 2003. – С. 293-298.

21. Федотов, А. И. Сходимость кубатурно-разностного метода для многомерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений / А. И. Федотов // Тез. докл. международ. конференции: Dynamical systems modelling and stability investigation, 27 – 30 мая 2003 г. – Киев, 2003. – С. 113-113.

22. Федотов, А. И. О сходимости квадратурно-разностного метода для полных линейных сингулярных интегродифференциальных уравнений на интервале / А. И. Федотов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2004. – Т. 44, №2. – С. 337-348.

23. Федотов, А. И. Оценка нормы оператора Лагранжа в многомерных пространствах Соболева / А. И. Федотов // Тез. докл. X международ. научной конференции им. академика М. Кравчука, 13 – 15 мая 2004 г. – Киев, 2004. – С. 153.

24. Федотов, А. И. Норма оператора Лагранжа в многомерных пространствах Соболева/ А. И. Федотов // Тез. докл. международ. конференции: Алгебра и анализ – 2004, 2 – 9 июля 2004 г. – Казань, 2004. – С. 108-109.

25. Федотов, А. И. Обоснование квадратурно-разностного метода решения сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши / А. И. Федотов // Тез. докл. XI международ. научной конференции им. академика М. Кравчука, 18 – 20 мая 2006 г. – Киев, 2006. – С. 627.

26. Федотов, А. И. Оценка нормы интерполяционного оператора Лагранжа в многомерном пространстве Соболева / А. И. Федотов // Матем. заметки. – 2007. – Т. 81, №3. – С. 427-433.

27. Федотов, А. И. Метод Галеркина для регуляризированного сингулярного интегро-дифференциального уравнения / А. И. Федотов // Материалы Девятой международной Казанской летней научной школы-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы", Казань, 1 – 7 июля, 2009. – Казанское математическое общество, 2009. – С. 289-290.

28. Fedotov, A. I. Asymptotic convergence of polynomial collocation method for periodic pseudodifferential equations / A. I. Fedotov // Abstracts: Equadiff 9, Conference on differential equations and their applications, Brno, August 25 – 29, 1997. – Brno, 1998. – P. 33.

29. Fedotov, A. I. On convergence of the polynomial collocation method for singular integral equations and periodic pseudifferential equations / A. I. Fedotov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2000. – V. 7. – P. 3-14. (http://ljm.ksu.ru/content7.htm)

30. Fedotov, A. I. On convergence of quadrature-differences method for linear singular integro-differential equations on the interval / A. I. Fedotov // Archivum Mathematicum. – 2001. – Tomus 37, №4. – P. 257-271.

31. Fedotov, A. I. On the asymptotic convergence of the polynomial collocation method for singular integral equations and periodic pseudodifferential equations / A. I. Fedotov // Archivum Mathematicum. – 2002. – Tomus 38, №1. – P. 1-13.

32. Fedotov, A. I. On convergence of cubature-differences method for multidimensional singular integro-differential equations / A. I. Fedotov // Book of abstracts: ENUMATH 2003, Fifth European conference on numerical mathematics and advanced applications, Prague, August 18 – 22, 2003. – Prague, 2003. – P. 48.

33. Fedotov, A. I. Lebesgue constant estimation in multidimensional Sobolev space / A. I. Fedotov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2004. – V. 14. – P. 25-32. (http://ljm.ksu.ru/content14.htm)

34. Fedotov, A. I. Convergence of cubature-differences method for multidimensional singular integro-differential equations / A. I. Fedotov // Archivum Mathematicum. – 2004. – Tomus 40, №2, – P. 181-191.

35. Fedotov, A. I. Cubature-differences method for singular integro-differential equations / A. I. Fedotov // Proceedings of ENUMATH 2003 the 5th European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, Prague, August 2003. – Springer-Verlag, 2004. – P. 308-315.

36. Fedotov, A. I. Justification of quadrature-difference methods for singular integrodifferential equations / A. I. Fedotov // Proceedings of the conference on Differential & Difference Equations and Applications, Melbourne, Florida, August 1-5, 2005. – Hindawi Publishing Corp., 2006. – P. 403-411.

37. Fedotov, A. I. Justification of the Galerkin method for one class of singular integro-differential equations on an interval / A. I. Fedotov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2008. – V. 29, №2, – P. 73-81.

38. Fedotov, A. I. Justification of a Galerkin method for a regularized Cauchy singular integro-differential equation / A. I. Fedotov // Quart. Appl. Math. – 2009. – V. 67. – P. 541-552.

39. Fedotov, A. I. Quadrature-differences methods for solving linear and nonlinear singular integral equations / A. I. Fedotov // Nonlinear Analysis. – 2009. – V. 71, №12. – P. 303-308.